

# Teoría de Grafos

Guillermo Durán

FCEyN, UBA / CONICET  
gduran@dm.uba.ar

Universidad de la República, Montevideo, Uruguay  
Diciembre 2008

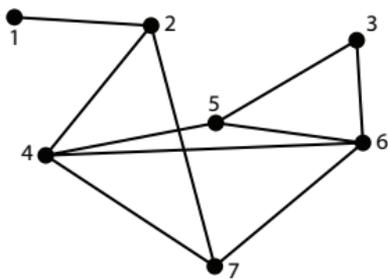
# Programa

- Introducción a la teoría de grafos
- Problemas de camino mínimo
- Problemas de flujo máximo
- Grafos perfectos y sus variaciones

# Unidad 1: Introducción a la teoría de grafos

## Definiciones básicas

- Un grafo  $G$  está formado por un par  $(V(G), E(G))$ :
  - $V(G)$  es un conjunto finito, el conjunto de **vértices** de  $G$ , y
  - $E(G)$  es un conjunto de pares no ordenados de vértices distintos de  $G$ , llamados **aristas**, que se notan por  $ij$  o  $(i, j)$ .
- **Notación:**
  - $n = n_G = |V(G)|$  y  $m = m_G = |E(G)|$ ;
  - $V_G = V(G)$ ,  $E_G = E(G)$ .
- Un grafo se dice **trivial** si tiene un solo vértice.



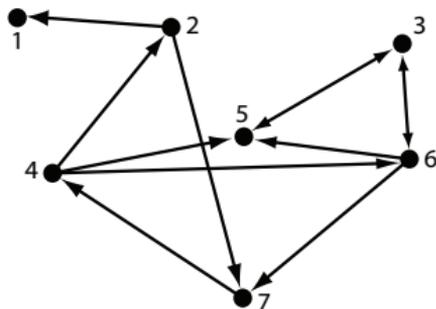
$$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$E(G) = \{(1, 2), (2, 4), (2, 7), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (5, 6), (6, 7)\}$$

$$n = 7; m = 10.$$

## Definiciones básicas

- Decimos que  $G$  es un **digrafo**, o un grafo dirigido, si las aristas están dadas por un conjunto de **pares ordenados** de vértices.



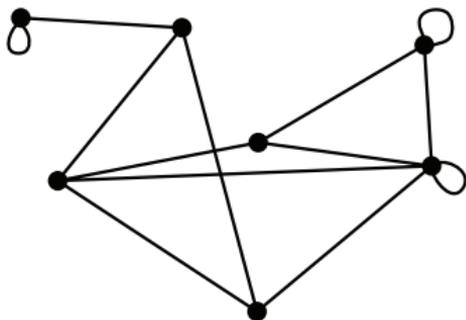
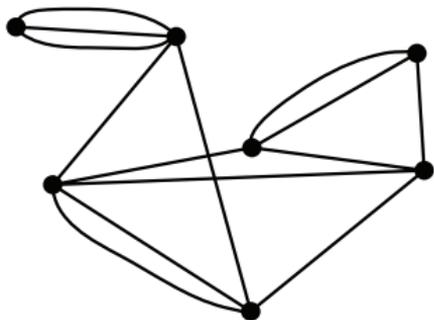
$$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$E(G) = \{(2, 1), (4, 2), (2, 7), (3, 5), (5, 3), (3, 6), (6, 3), (4, 5), (4, 6), (7, 4), (6, 5), (6, 7)\}$$

$$n = 7; m = 12.$$

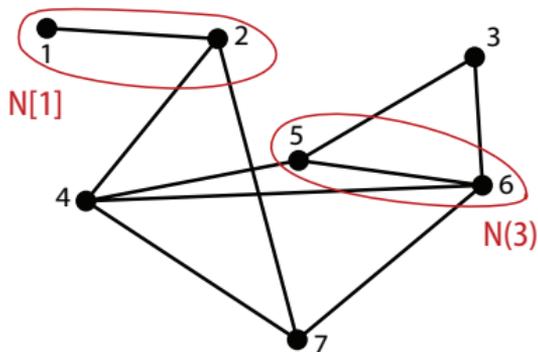
## Definiciones básicas

- Decimos que  $G$  es un **multigrafo** si se permite que entre un mismo par de vértices se trace más de una arista, y un **pseudografo** si se permiten aristas de tipo  $(v, v)$  (**loops**).



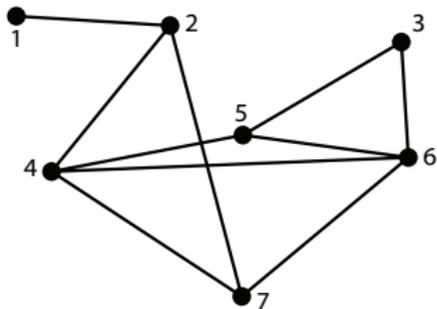
## Vecindarios

- Un vértice  $v$  es **adyacente** a otro vértice  $w$  en  $G$  si  $(v, w) \in E(G)$ . Decimos que  $v$  y  $w$  son los **extremos** de la arista.
- El vecindario de un vértice  $v$  en un grafo  $G$  es el conjunto  $N_G(v)$  que consiste de todos los vértices adyacentes a  $v$ . El vecindario cerrado de  $v$  es  $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ .
- **Notación:** si queda claro por contexto, se usa  $N(v)$  y  $N[v]$ .



# Grado

- El **grado** de un vértice  $v$  en  $G$  es la cardinalidad del conjunto  $N_G(v)$  y se nota  $d_G(v)$ . Si no hay ambigüedad, se usa  $d(v)$ .
- Dado un grafo  $G$ , notamos  $\delta(G)$  al grado mínimo y  $\Delta(G)$  al grado máximo entre los vértices de  $G$ .



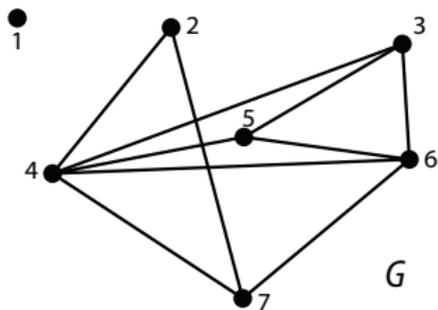
$$d(2) = 3$$

$$\delta(G) = 1$$

$$\Delta(G) = 4$$

# Grado

- Un vértice  $v$  es **aislado** cuando  $N(v) = \emptyset$ , o equivalentemente  $d(v) = 0$ .
- Un vértice  $v$  es **universal** cuando  $N(v) = V(G) - \{v\}$ , o equivalentemente  $d(v) = n - 1$ .



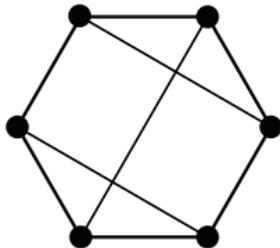
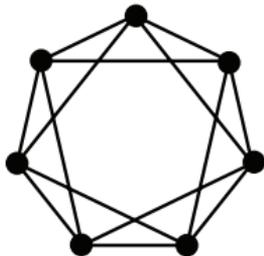
El vértice 1 es aislado en  $G$ .

El vértice 4 es universal en  $G - \{1\}$ .

Si  $G$  es no trivial y tiene un vértice aislado no puede tener también uno universal.

# Grado

- Un grafo se dice **regular** si todos sus vértices tienen el mismo grado.
- Un grafo se dice **cúbico** si todos sus vértices tienen grado **tres**.

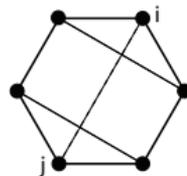


## Teorema

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m.$$

**Demo:** Por inducción en  $m_G$ . Si  $m_G = 0$ , entonces  $d_G(v) = 0$  para todo  $v \in V(G)$ , y por lo tanto  $0 = \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$ . Supongamos  $m_G > 0$ , y consideremos  $G'$  obtenido a partir de  $G$  sacando una arista cualquiera  $(i, j)$ . Entonces:

- $m_{G'} = m_G - 1$
- $d_{G'}(i) = d_G(i) - 1$  y  $d_{G'}(j) = d_G(j) - 1$
- $d_{G'}(v) = d_G(v)$  si  $v \neq i, j$



Por hipótesis inductiva,  $\sum_{v \in V(G')} d_{G'}(v) = 2m_{G'}$ . Luego  $d_{G'}(i) + d_{G'}(j) + \sum_{v \in V(G'), v \neq i, j} d_{G'}(v) = 2m_{G'}$ . Reemplazando,  $d_G(i) - 1 + d_G(j) - 1 + \sum_{v \in V(G), v \neq i, j} d_G(v) = 2(m_G - 1)$ . Es decir,  $(\sum_{v \in V(G)} d(v)) - 2 = 2m_G - 2$  y por lo tanto  $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m_G$ .  $\square$

# Grado

## Corolario

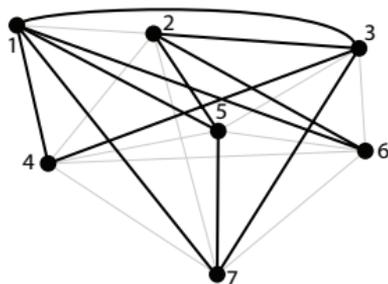
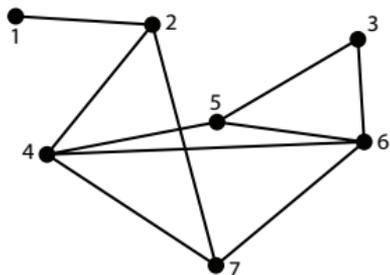
Todo grafo cúbico tiene un número par de vértices.

Demo:  $2m = \sum_{v \in V(G)} d(v) = 3n$ . Luego  $2 \mid n$ .



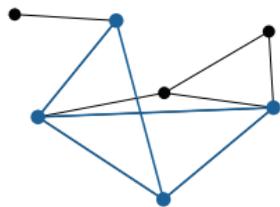
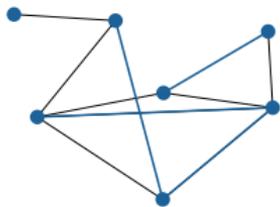
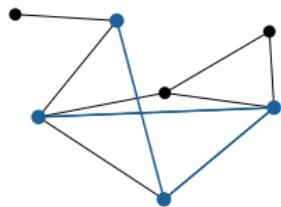
# Complemento

- El **complemento** de un grafo  $G$ , denotado por  $\overline{G}$ , es el grafo que tiene el mismo conjunto de vértices de  $G$  y tal que dos vértices distintos son adyacentes en  $\overline{G}$  si y sólo si no son adyacentes en  $G$ .



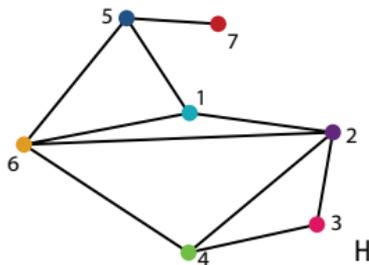
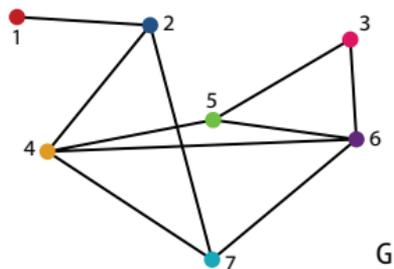
# Subgrafos

- Un grafo  $H$  es un **subgrafo** de un grafo  $G$  si  $V(H) \subseteq V(G)$  y  $E(H) \subseteq E(G)$ .
- Si  $V(H) = V(G)$ , decimos que  $H$  es un **subgrafo generador** de  $G$ .
- Dado un conjunto de vértices  $X \subseteq V(G)$ , el subgrafo de  $G$  **inducido** por  $X$  es el subgrafo  $H$  de  $G$  tal que  $V(H) = X$  y  $E(H)$  es el conjunto de aristas de  $G$  que tiene ambos extremos en  $X$ .
- **Notación:** Si  $v \in V(G)$ ,  $G - v$  denota el subgrafo de  $G$  inducido por  $V(G) - \{v\}$ .



# Isomorfismo

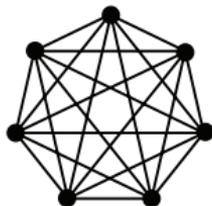
- Dos grafos  $G$  y  $H$  son isomorfos si existe una biyección entre  $V(G)$  y  $V(H)$  que conserva las adyacencias. En este caso, notamos  $G = H$ .
- Más formalmente,  $G$  y  $H$  son isomorfos si existe  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  biyectiva tal que  $(v, w) \in E(G)$  si y sólo si  $(f(v), f(w)) \in E(H)$ .
- El isomorfismo es una relación de equivalencia.



$$\begin{aligned} f(1) &= 7 \\ f(2) &= 5 \\ f(3) &= 3 \\ f(4) &= 6 \\ f(5) &= 4 \\ f(6) &= 2 \\ f(7) &= 1 \end{aligned}$$

## Grafos completos

- Un grafo  $G$  es **completo** si cualquier par de vértices distintos de  $G$  son adyacentes. Llamamos  $K_n$  al grafo completo con  $n$  vértices.
- $K_3$  se llama también **triángulo**.
- ¿Cuánto valen  $m_{K_n}$ ,  $\delta(K_n)$  y  $\Delta(K_n)$ ?



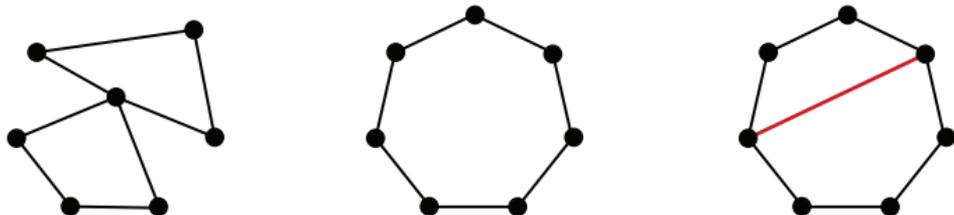
# Caminos

- Un **camino** en un grafo  $G$  es una secuencia de vértices distintos  $P = v_1, v_2, \dots, v_k$ , donde  $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$ ,  $i = 1, \dots, k - 1$ .
- Una **cuerda** en  $P$  es una arista que une dos vértices no consecutivos de  $P$ .
- Un **camino inducido** es un camino sin cuerdas. Denotamos por  $P_k$  al camino inducido de  $k$  vértices.
- ¿Cuánto valen  $m_{P_k}$ ,  $\delta(P_k)$  y  $\Delta(P_k)$ ?



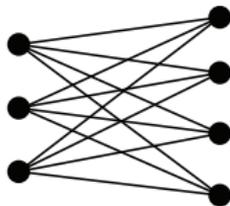
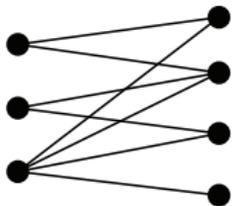
## Circuitos y ciclos

- Un **circuito** en un grafo  $G$  es una secuencia de vértices  $C = v_1, v_2, \dots, v_k$ , no necesariamente distintos, donde  $v_1 = v_k$  y  $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$ ,  $i = 1, \dots, k - 1$ .
- Si  $k \geq 3$  y  $v_1, \dots, v_{k-1}$  son distintos,  $C$  se llama **ciclo**.
- Una **cuerda** en  $C$  es cualquier cuerda del camino  $v_1, v_2, \dots, v_k$  excepto  $(v_1, v_k)$ .
- Un ciclo es un **ciclo inducido** si no posee cuerdas. Llamamos  $C_k$  al ciclo inducido de  $k$  vértices.
- ¿Cuánto valen  $m_{C_k}$ ,  $\delta(C_k)$  y  $\Delta(C_k)$ ?



## Grafos bipartitos completos

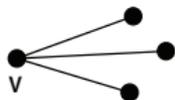
- Un grafo  $G$  es **bipartito** si  $V(G) = V_1 \cup V_2$ , con  $V_1$  y  $V_2$  disjuntos, y toda arista tiene un extremo en  $V_1$  y otro en  $V_2$ .
- Un grafo  $G$  es **bipartito completo** si además todo vértice de  $V_1$  es adyacente a todo vértice de  $V_2$ . Llamamos  $K_{r,s}$  al grafo bipartito completo tal que  $|V_1| = r$  y  $|V_2| = s$ .
- ¿Cuánto valen  $n_{K_{r,s}}$ ,  $m_{K_{r,s}}$ ,  $\delta(K_{r,s})$  y  $\Delta(K_{r,s})$ ?



## Teorema

Si un grafo tiene 6 o más vértices, entonces el grafo o su complemento tienen un triángulo.

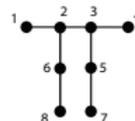
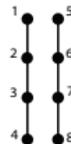
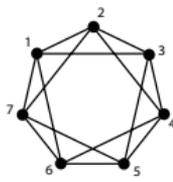
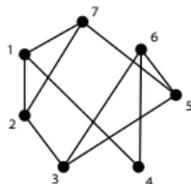
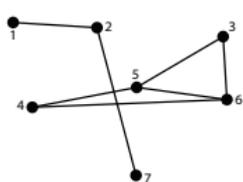
**Demo:** Sea  $v \in V(G)$ . Como  $d_G(v) + d_{\bar{G}}(v) = n - 1 \geq 5$ , podemos asumir s.p.g. que  $d_G(v) \geq 3$ .



Si hay dos vértices adyacentes  $w$  y  $z$  en  $N_G(v)$ , entonces  $v, w, z$  forman un triángulo. Si no hay dos vértices adyacentes en  $N_G(v)$ , entonces  $N_G(v)$  induce un subgrafo completo en  $\bar{G}$ , y como  $|N_G(v)| \geq 3$ ,  $\bar{G}$  contiene un triángulo. □

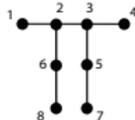
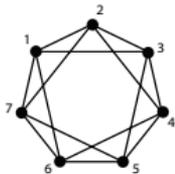
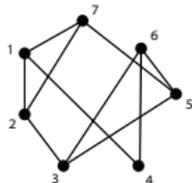
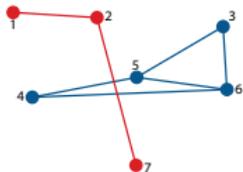
# Conexión

- Un grafo  $G$  es **conexo** si para todo par de vértices distintos  $v$  y  $w$  de  $G$  existe un camino de  $v$  a  $w$ .
- ¿Cuáles de los siguientes grafos son conexos?



# Conexión

- Un conjunto  $S$  es **maximal (minimal)** en relación a una determinada propiedad  $P$  si  $S$  satisface  $P$ , y todo conjunto  $S'$  que contiene propiamente a  $S$  (que está contenido propiamente en  $S$ ) no satisface  $P$ .
- Una **componente conexa** de un grafo es un subgrafo conexo maximal.
- ¿Cuáles son las componentes conexas de estos grafos?



# Conexión

## Observaciones

1. Todo vértice de un grafo pertenece a alguna componente conexa.
2. Un grafo es conexo si y sólo si tiene una sola componente conexa.
3. Dos componentes conexas distintas de un grafo son disjuntas.

**Demo de 3.:** Supongamos que  $v \in G_1 \cap G_2$ . Entonces para todo par de vértices  $w, z$  de  $G_1 \cup G_2$  existe un camino de  $w$  a  $v$  y un camino de  $v$  a  $z$  (de longitud cero si alguno es  $v$ ).



De la unión de esos dos caminos se puede extraer un camino simple de  $w$  a  $z$ . Por lo tanto  $G_1 \cup G_2$  es un subgrafo conexo, pero como  $G_1$  y  $G_2$  eran maximales, resulta  $G_1 = G_2 = G_1 \cup G_2$ . □

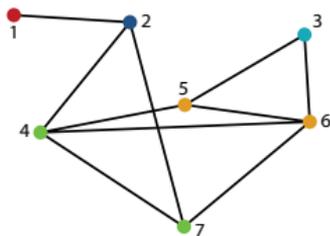
# Distancia

- La **longitud de un camino** se mide por la cantidad de aristas que lo componen.
- La **distancia** entre dos vértices  $v$  y  $w$  en  $G$  es la longitud del camino más corto entre  $v$  y  $w$  y se nota  $d_G(v, w)$ . Si el contexto no es ambiguo, se abrevia  $d(v, w)$ .

¿Cuál es la distancia entre 1 y 5?

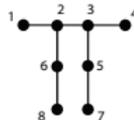
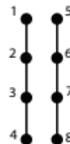
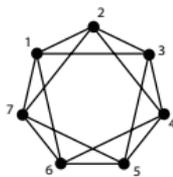
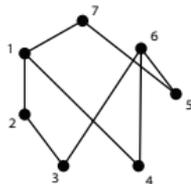
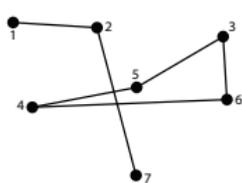
- El disco  $D_k(v)$  de centro  $v$  y radio  $k$  ( $k \geq 0$ ) es el conjunto de vértices de  $G$  que están a distancia menor o igual que  $k$  de  $v$ .

¿Cuáles son los discos con centro 1 en este grafo?



# Grafos bipartitos

- Un grafo  $G$  es **bipartito** si  $V(G) = V_1 \cup V_2$ , con  $V_1$  y  $V_2$  disjuntos, y toda arista tiene un extremo en  $V_1$  y otro en  $V_2$ .
- ¿Cuáles de los siguientes grafos son bipartitos?



## Teorema

Un grafo  $G$  es bipartito  $\Leftrightarrow$  todos sus circuitos son pares.

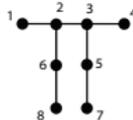
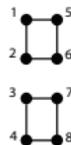
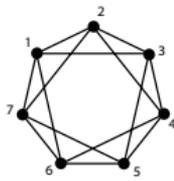
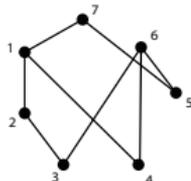
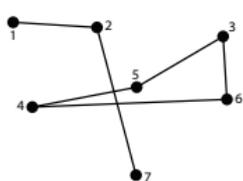
Demo:

$\Rightarrow$ ) Sabemos que  $V(G) = V_1 \cup V_2$  y toda arista va de  $V_1$  a  $V_2$ . Sea  $v_1, v_2, \dots, v_n$  un circuito en  $G$ . Si  $v_1 \in V_1$  entonces los vértices de subíndice par tienen que pertenecer a  $V_2$  y los de subíndice impar a  $V_1$ . Como  $v_n$  es adyacente a  $v_1$ ,  $n$  tiene que ser par.

$\Leftarrow$ ) Sea  $v$  en  $V(G)$ . Definimos  $V_1$  y  $V_2$  como los vértices que están a distancia impar o par de  $v$ , respectivamente. Supongamos que no es una bipartición, o sea, existen  $z$  y  $w$  que están a ambos a distancia par o impar de  $v$  y son adyacentes. Como la diferencia entre las distancias es a lo sumo 1, entonces están a la misma distancia. Sea  $v'$  el primer vértice en común entre los caminos mínimos de  $w$  a  $v$  y de  $z$  a  $v$ . La longitud de los sub-caminos de  $w$  a  $v'$  y de  $z$  a  $v'$  tiene que ser la misma. Entonces esos sub-caminos y la arista  $wz$  forman un ciclo impar. □

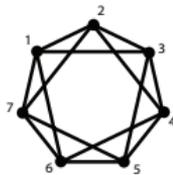
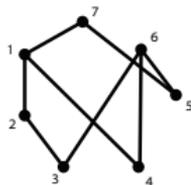
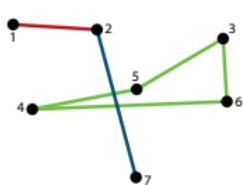
# Conexión

- Un **punto de corte** de un grafo  $G$  es un vértice  $v$  tal que  $G - v$  tiene más componentes conexas que  $G$ .
- ¿Qué vértices son puntos de corte en estos grafos?
- Un grafo es **biconexo** si es conexo y sin puntos de corte.
- ¿Cuáles de estos grafos son biconexos?



# Conexión

- Un **bloque** o **componente biconexa** de un grafo es un subgrafo biconexo maximal.
- ¿Cuáles son los bloques en estos grafos?



# Conexión

## Observaciones

1. Un grafo es biconexo si y sólo si tiene un solo bloque.
2. Dos bloques de un grafo comparten a lo sumo un vértice. En particular, cada arista pertenece a un único bloque.

## Teorema

Sea  $G$  conexo y sea  $v$  un vértice de  $G$ . Son equivalentes:

1. El vértice  $v$  es un punto de corte de  $G$ .
2. Existen vértices  $u$  y  $w$  distintos de  $v$  tales que  $v$  está en todo camino entre  $u$  y  $w$ .
3. Existe una partición de  $V - v$  en  $U$  y  $W$  tal que para todo  $u$  en  $U$  y para todo  $w$  en  $W$ , el punto  $v$  está en todo camino entre  $u$  y  $w$ .

**Demo:**  $1 \Rightarrow 3$ ) Si  $v$  es punto de corte  $\Rightarrow G - v$  es desconexo. Sea  $U$  una componente conexa de  $G - v$  y  $W$  los vértices restantes. Sean  $u \in U$  y  $w \in W$ ; como están en componentes conexas distintas de  $G - v$ , todo camino en  $G$  entre ellos contiene a  $v$ .

$3 \Rightarrow 2$ ) Tomamos  $u$  en  $U$  y  $w$  en  $W$ .

$2 \Rightarrow 1$ ) Si  $v$  está en todo camino de  $u$  a  $w$ , entonces no existe un camino entre  $u$  y  $w$  en  $G - v$ . Por lo tanto  $G - v$  no es conexo, y  $v$  es punto de corte de  $G$ . □

## Conexión

- Un **punto** de un grafo  $G$  es una arista  $e$  tal que  $G - e$  tiene más componentes conexas que  $G$ .
- Sea  $G$  conexo,  $v$  un punto de corte y  $e$  un puente. ¿Puede ser que  $G - v$  tenga más de dos componentes conexas? ¿Y  $G - e$ ?
- ¿Existe algún grafo biconexo que tenga un puente?

**Rta:** Sólo el grafo formado por una única arista. Si  $e = vw$  es un puente en  $G$ , entonces las componentes conexas de  $G - e$  son  $G_1$  y  $G_2$ , donde  $v \in G_1$  y  $w \in G_2$ . Notemos que  $v$  es punto de corte en  $G$  salvo que  $G_1 = \{v\}$  y  $w$  es punto de corte en  $G$  salvo que  $G_2 = \{w\}$ . Entonces, si  $G$  es biconexo,  $V(G) = \{v, w\}$  y  $E(G) = \{e\}$ . □

## Teorema

Sea  $G$  conexo y sea  $e = ij$  una arista de  $G$ . Son equivalentes:

1. La arista  $e$  es un puente de  $G$ .
2. La arista  $e$  no está en ningún ciclo de  $G$ .
3. Existen vértices  $u$  y  $v$  tales que  $e$  está en todo camino entre  $u$  y  $v$ .

**Demo:**  $1 \Rightarrow 2$ ) Si  $e$  está en un ciclo  $C$ , entonces  $C - e$  es un camino  $P$  entre  $i$  y  $j$ . En cualquier camino entre dos vértices  $u$  y  $v$ , la arista  $e$  podría ser reemplazada por el camino  $P$ . Luego  $e$  no es puente.

$2 \Rightarrow 3$ ) Sean  $i$  y  $j$  los extremos de  $e$ . Si para todo par de vértices  $u, v$  existe un camino que los une y no pasa por  $e$ , en particular existe un camino  $P$  entre  $i$  y  $j$  que no usa  $e$ . Pero entonces  $P \cup e$  es un ciclo.

$3 \Rightarrow 1$ ) Si  $e$  está en todo camino de  $u$  a  $v$ , entonces no existe un camino entre  $u$  y  $v$  en  $G - e$ . Por lo tanto  $G - e$  no es conexo, y  $e$  es un puente de  $G$ . □